Негосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Школа управления СКОЛКОВО»

Утверждено

ректор С.С. Писарев

“25” апреля 2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Математический анализ

Направление подготовки	38.03.02 Менеджмент
Квалификация выпускника	Бакалавр
Образовательная программа	Управление и предпринимательство
Форма обучения	Очная
Рабочая программа дисциплины разработана	

Трудоемкость		Контактная работа		Самостоятельная работа	Форма контроля	Семестр/квартиль
з.е.	часы	лекции	семинарские занятия			
6	216	46	46	124	Дифф. зачет, экзамен	1/2, 2/3

Москва
2024

1. АННОТАЦИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе "Математический анализ" изучаются основополагающие понятия математического анализа функций одной переменной такие, как предел последовательности, предел функции в точке и непрерывность функции в точке.

Основным утверждением теории действительного числа является теорема о существовании точной верхней (нижней) грани ограниченного множества. Изучаются свойства сходящихся числовых последовательностей и последовательностей, имеющих предел. Раздел заканчивается изучением критерия Коши сходимости числовой последовательности. Исследуются свойства функций, имеющих предел в точке, непрерывных в точке и непрерывных на отрезке. Изучаются свойства функций, имеющих в точке производную (дифференцируемые в точке функции) и производные высших порядков. В частности, изучаются формулы Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано. Эти сведения применяются к исследованию функций и к изучению векторных функций (элементы дифференциальной геометрии). Изучается интегральное исчисление — неопределенный интеграл.

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью дисциплины является формирование базовых знаний по математическому анализу для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах с естественнонаучным содержанием; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

В случае успешного освоения курса студенты будут:

знать

- основные свойства пределов последовательностей и функций действительного переменного, производной, дифференциала, неопределенного интеграла; свойства функций, непрерывных на отрезке;
- основные «замечательные пределы», табличные формулы для производных и неопределенных интегралов, формулы дифференцирования, основные разложения элементарных функций по формуле Тейлора;
- основные формулы дифференциальной геометрии.

уметь

- записывать высказывания при помощи логических символов;
- вычислять пределы последовательностей и функций действительного переменного;
- вычислять производные элементарных функций, раскладывать элементарные функции по формуле Тейлора; вычислять пределы функций с применением формулы Тейлора и правила Лопиталя;
- строить графики функций с применением первой и второй производных; исследовать функции на локальный экстремум, а также находить их наибольшее и наименьшее значения на промежутках;
- вычислять кривизну плоских и пространственных кривых.

владеть

- предметным языком классического математического анализа, применяемым при построении теории пределов;
- аппаратом теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления для решения различных задач, возникающих в физике, технике, экономике и других прикладных дисциплинах.

Дисциплина направлена на развитие следующих компетенций и их индикаторов:

Код компетенции	Формулировка компетенции и/или ее индикатора (ов)
ОПК-1.	**Способен решать профессиональные задачи на основе знаний (на промежуточном уровне) экономической, организационной и управленческой теории**
ОПК-1-1.	Знает основы математической, экономической, социальной и управленческой теории и использует знания для решения профессиональных задач
ОПК-1-2.	Формулирует профессиональные задачи, используя понятийный аппарат математической, экономической, социальной и управленческой наук
ОПК-1-3.	Применяет инструментарий экономико-математического моделирования для постановки и решения профессиональных задач выявления причинно-следственных связей и оптимизации деятельности объекта управления

3. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Название раздела/темы	Всего часов	Трудоемкость (час.) по видам учебных занятий			
		Контактная работа			Самостоятельная работа
		Всего	Лекции	семинары	
Первый семестр					
Тема 1. Действительные числа	16	6	2	4	10
Тема 2. Пределы последовательностей	16	6	4	2	10
Тема 3. Предел и непрерывность функций одной переменной	20	8	4	4	12
Тема 4. Производная и ее применение	18	8	4	4	10
Тема 5. Комплексные числа	20	8	4	4	12
Тема 6. Первообразная и	18	8	4	4	10

неопределенный интеграл					
Итого	108	44	22	22	64
Второй семестр					
Тема 7. Точечное n–мерное пространство	10	4	2	2	6
Тема 8. Предел числовой функции нескольких переменных	12	4	2	2	8
Тема 9. Непрерывность функции нескольких переменных	12	4	2	2	8
Тема 10. Частные производные	12	6	4	2	6
Тема 11. Мера Жордана	12	4	2	2	8
Тема 12. Определенный интеграл Римана	12	6	2	4	6
Тема 13. Числовые ряды	14	8	4	4	6
Тема 14. Функциональные последовательности и ряды	14	8	4	4	6
Тема 15. Кратный интеграл Римана	10	4	2	2	6
Итого	108	48	24	24	60
Всего	216	92	46	46	124

Тема 1. Действительные числа.
Отношения неравенства между действительными числами. Принцип Архимеда. Плотность множества рациональных чисел во множестве действительных чисел. Теорема о существовании и единственности точной верхней грани (верхней грани) [точной нижней грани (нижней грани)] числового множества, ограниченного сверху

[снизу]. Арифметические операции с действительными числами. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

Тема 2. Пределы последовательностей

Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число е. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно большие последовательности и их свойства.

Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

Тема 3. Предел и непрерывность функций одной переменной

Предел функции одной переменной. Определения в терминах последовательностей (по Гейне) и в терминах окрестностей (по Коши), их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

Свойства функций, непрерывных на отрезке, ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность и теорема Кантора.

Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы, следствия из них. Сравнение величин (символы о, О, ~).

Тема 4. Производная и ее применение

Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.

Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида 0/0. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида ∞/∞.

Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.

Тема 5. Комплексные числа

Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Информация об основной теореме алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители.

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.

Тема 6. Первообразная и неопределенный интеграл

Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.

Тема 7. Точечное n–мерное пространство

Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

Тема 8. Предел числовой функции нескольких переменных

Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам.

Тема 9. Непрерывность функции нескольких переменных

Непрерывность по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

Тема 10. Частные производные

Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.

Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

Тема 11. Мера Жордана

Мера Жордана в n–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.

Тема 12. Определенный интеграл Римана

Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, лиейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.

Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций. Признаки сходимости. Интегралы от знакопеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

Тема 13. Числовые ряды

Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.

Тема 14. Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Дирихле и Абеля.

Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.

Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Непрерывно дифференцируемые отображения конечномерных пространств, их якобиан. Теорема о неявном отображении (о системе неявных функций, доказательство на усмотрение лектора). Локальная обратимость отображения с ненулевым якобианом.

Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связей: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия. Достаточные условия.

Тема 15. Кратный интеграл Римана

Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость функции, непрерывной на измеримом компакте. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств, теоремы о среднем, непрерывность интеграла по множеству. Сведение кратного интеграла к повторному.

Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения конечномерных (двумерных) пространств. Теорема о замене переменных в кратном интеграле (доказательство на усмотрение лектора).

4. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА И ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Текущий контроль

Текущий контроль состоит из письменных домашних заданий и контрольных работ во время которых необходимо решить несколько задач и ответить на вопросы. Примеры заданий представлены в разделе 4.3.

4.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в форме письменного экзамена продолжительностью 4 академических часа.

Оценка		Критерий
5 Отлично	10	Студент продемонстрировал всесторонние, системати-зированные, глубокие знания и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и безупречное обоснование принятых решений
	9	Студент продемонстрировал всесторонние, системати-зированные, глубокие знания и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений
4 Хорошо	8	Студент продемонстрировал всесторонние, системати-зированные, знания и умение применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, но при оформлении работы допущена некоторая небрежность, не влияющее на качество изложения теоретического материала и представление решения практической задачи
	7	Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе на теоретические вопросы некоторую неполноту, которую может устранить с помощью дополнительных вопросов преподавателя
3 Удовлетворительно	6	Студент знает основной материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности, которые может устранить с помощью дополнительных вопросов преподавателя
	5	Студент знает основной материал, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении практических задач неполноту и неточности, некоторые из которых может устранить только с помощью наводящих вопросов преподавателя

2 Неудовлетворительно	4	Студент продемонстрировал знание отдельных тем, привел правильные формулировки некоторых базовых понятий, в изложении материала нарушена логическая последовательность; практические задачи может решать по предложенным в рамках дисциплины образцам, не демонстрируя их творческой адаптации под конкретную ситуацию
	3	Студент не продемонстрировал знание материала, есть значительные ошибки в формулировках базовых понятий, в изложении материала нарушена логическая последовательность; практические задачи решены с ошибками
	1,2	Студент не знает основного содержания тем дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий и/или не решил практическую задачу

4.3 Примеры заданий

Примеры заданий для текущего контроля и промежуточной аттестации

1. Пусть X, Y — непустые числовые множества, причем inf X > supY. Могут ли X и Y пересекаться?
2. Верно ли, что пересечение элементов произвольной вложенной системы замкнутых множеств не пусто?
3. Сформулировать в положительной форме: а) последовательность не является ограниченной; б) число a не является пределом последовательности.
4. Доказать, что из сходимости последовательности {an}следует сходимость последовательности {|an|}. Верно ли обратное утверждение?
5. Пусть{an}—сходящаяся последовательность. Является ли сходящейся последовательность {an+1 −an}?
6. Пусть последовательность {an} сходится, а последовательность {bn} расходится. Что можно сказать о сходимости последовательностей {an + bn}, {anbn}?
7. Пусть lim n→∞ anbn = 0. Следует ли отсюда, что или lim n→∞ an = 0, или lim n→∞ bn = 0?
8. Доказать,что если an → + ∞ при n → ∞, то последовательность достигает своей точной нижней грани (т.е. ∃min{an}).
9. Доказать, что если последовательность {an} неограничена, то существует бесконечно большая подпоследовательность {ank}.
10. Доказать, что если некоторая подпоследовательность монотонной последовательности ограничена, то и сама последовательность ограничена.
11. Построить пример последовательности, которая а) не имеет конечных частичных пределов; б) имеет единственный конечный частичный предел, но не является сходящейся.
12. Верно ли, что множество частичных пределов произвольной последовательности {an} является объединением множеств частичных пределов последовательностей {a2n} и {a2n+1} соответственно?
13. Доказать, что любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

14. Можно ли построить непрерывное взаимно однозначное отображение интервала (0,1) на отрезок [0,1]?
15. Привести пример элементарной функции, область определения которой есть заданное конечное множество.
16. Доказать,что если непрерывная на R функция f имеет две различные точки локального максимума, то между ними есть точка локального минимума.
17. Может ли при замене параметра на гладкой параметризованной кривой особая точка переходить в неособую?

Примеры экзаменационных билетов для проверки теоретических знаний

1. Билет №1

а) Теорема о существовании и единственности (точной) верхней грани числового множества, ограниченного сверху.

б) Теорема Ролля.

2. Билет №2

а) Оценка приращения вектор-функции через производную.

б) Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, и достижимость (точных) верхней и нижней граней.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1 Литература

1. Плотникова, Е. Г. Математический анализ для экономического бакалавриата : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 274 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11515-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/540094 (дата обращения: 19.05.2024).
2. Кытманов, А. М. Математический анализ : учебное пособие для бакалавров / А. М. Кытманов. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 607 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-2785-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/425244 (дата обращения: 19.05.2024).

5.2 Электронные образовательные ресурсы

Материалы дисциплины размещены в LMS: https://l.skolkovo.ru/login/index.php

5.3 Профессиональные базы данных и информационные справочные системы (при наличии)

нет

6. ЛИЦЕНЗИОННОЕ И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Операционная система Simple Linux, браузер Yandex браузер, антивирусное ПО Calmantivirus;

Свободно распространяемое ПО, в том числе отечественного производства:

Офисный пакет Libre Office, Okular PDF Reader, 7-Zip Архиватор, GIMP Редактирования фотографий, Inkscape Векторная графика, Blender 3D графика, Kdenlive Видеоредактор, Audacity Аудиоредактор, VLC Медиаплеер, Thunderbird Почтовый клиент, Flameshot Создание скриншотов

7.МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная мультимедийным оборудованием, учебной мебелью, доской или со стенами с маркерным покрытием.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, оснащенная мультимедийным оборудованием, учебной мебелью, доской или со стенами с маркерным покрытием.

Аудитория (коворкинг) для самостоятельной работы оснащенная учебной мебелью, ноутбуками.

Материально-техническое обеспечение аудиторий представлено на официальном сайте https://bbask.ru/sveden/objects/