

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Писарев Сергей Станиславович  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 09.10.2024 11:35:01  
Уникальный программный ключ:  
b9d7463b91f434da3d4dc1afa9a0cf32d3c58650

**Негосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Школа управления СКОЛКОВО»**



Утверждено  
Ректор С.С. Писарев  
«25» апреля 2024 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
Линейная алгебра**

|   |                                  |
|---|----------------------------------|
| <b>Направление подготовки</b>                   | 38.03.02 Менеджмент              |
| <b>Квалификация выпускника</b>                  | Бакалавр                         |
| <b>Образовательная программа</b>                | Управление и предпринимательство |
| <b>Форма обучения</b>                           | Очная                            |
| <b>Рабочая программа дисциплины разработана</b> | Антон Скубачевский, к.ф-м.н.     |

| Трудоемкость |      | Контактная работа |                     | Самостоятельная работа | Форма контроля | Семестр/кварталь |
|--------------|------|-------------------|---------------------|------------------------|----------------|------------------|
| з.е.         | часы | лекции            | семинарские занятия |                        |                |                  |
| 3            | 108  | 22                | 22                  | 64                     | Экзамен        | 1/2              |

**Москва  
2024**

## 1. АННОТАЦИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе “Линейная алгебра” изучаются матрицы и основные операции над ними. Развивается теория систем линейных уравнений, основы теории линейных пространств (базис, размерность, суммы и пересечения подпространств, двойственное пространство и связанные понятия). Вводятся понятия линейных отображения и преобразования, ядра и образа. Обсуждается перевод всех этих понятий на матричный язык.

Развивается теория линейного преобразования (оператора) линейного пространства. Изучаются инвариантные подпространства, собственные значения и собственные векторы, характеристический многочлен, вопросы, связанные с диагонализуемостью оператора. Далее доказывается теорема Гамильтона-Кэли.

Вводятся понятия билинейной формы, квадратичной формы, изучаются вопросы приведения матрицы такой формы к каноническому виду.

Вводится и изучается понятие евклидова (эрмитова) пространства, связанные с ним понятия (длина, ортогональная проекция, объём).

Изучаются линейные операторы и квадратичные формы на евклидовых пространствах, их приведение к каноническому виду. Описываются полярное и сингулярное разложение матрицы.

## 2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины - ознакомление слушателей с основами алгебры и подготовка к изучению других математических, экономических и управленческих курсов курсов.

В случае успешного освоения курса студенты будут:

### знать

- операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- алгоритм Евклида для поиска наибольшего общего делителя; определение
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- определения и основные свойства собственных векторов, собственных значений, характеристического многочлена;
- приведение квадратичной формы к каноническому виду, критерий Сильвестра;
- координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- как методы линейной алгебры применяются в разных областях науки, в частности, в анализе данных и машинном обучении

### уметь

- производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
- решать системы линейных уравнений с помощью матричных методов (метод Гаусса, метод Крамер);
- находить численное решение системы линейных уравнений, исследовать системы линейных уравнений на совместность;

- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы;
- находить собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, приводить квадратичную форму к каноническому виду, находить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

**владеть**

- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй.

Дисциплина направлена на развитие следующих компетенций и их индикаторов:

| Код компетенции | Формулировка компетенции и/или ее индикатора (ов)   |
|-----------------|---|
| <b>ОПК-1.</b>   | <b>Способен решать профессиональные задачи на основе знаний (на промежуточном уровне) экономической, организационной и управленческой теории</b>  |
| ОПК-1-1.        | Знает основы математической, экономической, социальной и управленческой теории и использует знания для решения профессиональных задач   |
| ОПК-1-2.        | Формулирует профессиональные задачи, используя понятийный аппарат математической, экономической, социальной и управленческой наук   |
| ОПК-1-3.        | Применяет инструментарий экономико-математического моделирования для постановки и решения профессиональных задач выявления причинно-следственных связей и оптимизации деятельности объекта управления |

### 3. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

| Название раздела/темы              | Всего часов | Трудоемкость (час.) по видам учебных занятий |        |          |                        |
|------------------------------------|-------------|--|--------|----------|------------------------|
|                                    |             | Контактная работа                            |        |          | Самостоятельная работа |
|                                    |             | Всего  | Лекции | семинары |                        |
| Тема 1. Ранг матрицы               | 6           | 2  | 2      |          | 4                      |
| Тема 2. Системы линейных уравнений | 8           | 4  | 2      | 2        | 4                      |

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| Тема 3. Аксиоматика линейного пространства  | 6 | 2 | 2 |   | 4 |
| Тема 4. Векторы линейного пространства  | 8 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| Тема 5. Подпространства   | 6 | 2 | 2 |   | 4 |
| Тема 6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства                            | 8 | 2 |   | 2 | 6 |
| Тема 7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств                                | 8 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| Тема 8. Инвариантные подпространства линейных преобразований  | 8 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| Тема 9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства | 8 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| Тема 10. Линейные формы   | 8 | 2 |   | 2 | 6 |
| Тема 11. Билинейные и квадратичные формы  | 6 | 2 | 2 |   | 4 |

|   |     |    |    |    |    |
|---|-----|----|----|----|----|
| Тема 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду | 6   | 2  |    | 2  | 4  |
| Тема 13. Аксиоматика евклидова пространства                 | 8   | 4  | 2  | 2  | 4  |
| Тема 14. Ортогонализации в евклидовом пространстве          | 6   | 2  |    | 2  | 4  |
| Тема 15. Линейные преобразования евклидова пространства     | 8   | 4  | 2  | 2  | 4  |
| Итого   | 108 | 44 | 22 | 22 | 64 |

### **Тема 1. Ранг матрицы**

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

### **Тема 2. Системы линейных уравнений**

Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.

### **Тема 3. Аксиоматика линейного пространства.**

Аксиоматика линейного пространства.

Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.

### **Тема 4. Векторы линейного пространства**

Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.

### **Тема 5. Подпространства**

Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.

### **Тема 6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства**

Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).

### **Тема 7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств**

Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов.

### **Тема 8. Инвариантные подпространства линейных преобразований**

Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.

#### **Тема 9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства**

Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона–Кэли.

#### **Тема 10. Линейные формы**

Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис.

#### **Тема 11. Билинейные и квадратичные формы**

Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

#### **Тема 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду**

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями.

#### **Тема 13. Аксиоматика евклидова пространств**

Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

#### **Тема 14. Ортогонализации в евклидовом пространстве**

Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.

#### **Тема 15. Линейные преобразования евклидова пространства**

Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.

### **4. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА И ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

#### **4.1 Текущий контроль**

Текущий контроль состоит из письменных домашних заданий и контрольных работ во время которых необходимо решить несколько задач и ответить на вопросы. Примеры заданий представлены в разделе 4.3.

#### **4.2 Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация проводится в форме письменного экзамена продолжительностью 4 академических часа.

| Оценка       |    | Критерий   |
|--------------|----|--|
| 5<br>Отлично | 10 | Студент продемонстрировал всесторонние, систематизированные, глубокие знания и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и безупречное обоснование принятых решений |

|                          |     |  |
|--------------------------|-----|--|
|                          | 9   | Студент продемонстрировал всесторонние, систематизированные, глубокие знания и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений  |
| 4<br>Хорошо              | 8   | Студент продемонстрировал всесторонние, систематизированные, знания и умение применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, но при оформлении работы допущена некоторая небрежность, не влияющее на качество изложения теоретического материала и представление решения практической задачи |
|                          | 7   | Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе на теоретические вопросы некоторую неполноту, которую может устранить с помощью дополнительных вопросов преподавателя   |
| 3<br>Удовлетворительно   | 6   | Студент знает основной материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности, которые может устранить с помощью дополнительных вопросов преподавателя   |
|                          | 5   | Студент знает основной материал, по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении практических задач неполноту и неточности, некоторые из которых может устранить только с помощью наводящих вопросов преподавателя  |
| 2<br>Неудовлетворительно | 4   | Студент продемонстрировал знание отдельных тем, привел правильные формулировки некоторых базовых понятий, в изложении материала нарушена логическая последовательность; практические задачи может решать по предложенным в рамках дисциплины образцам, не демонстрируя их творческой адаптации под конкретную ситуацию                       |
|                          | 3   | Студент не продемонстрировал знание материала, есть значительные ошибки в формулировках базовых понятий, в изложении материала нарушена логическая последовательность; практические задачи решены с ошибками   |
|                          | 1,2 | Студент не знает основного содержания тем дисциплины, допускает грубые ошибки в  |

|  |  |   |
|--|--|---|
|  |  | формулировках основных понятий и/или не решил практическую задачу |
|--|--|---|

### 4.3 Примеры заданий

#### Примеры заданий для текущего контроля и промежуточной аттестации

1. Пусть  $A$  и  $B$  – две квадратные матрицы одного размера. Обязаны ли совпадать ранги матриц  $AB$  и  $BA$ ?
2. Запишите общее решение уравнения  $x_1+x_2+x_3+x_4=0$  в виде суммы частного решения и произвольной линейной комбинации фундаментальной системы решений.

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1 Литература

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 421 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-15839-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/535849> (дата обращения: 21.05.2024).
2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 416 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-18887-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/555026> (дата обращения: 21.05.2024).
3. Малугин, В. А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач : для вузов / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 478 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02976-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/536498> (дата обращения: 21.05.2024).

#### Дополнительная

Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — 19-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-9223-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/189312> (дата обращения: 29.05.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

### 5.2 Электронные образовательные ресурсы

Материалы дисциплины размещены в LMS: <https://l.skolkovo.ru/login/index.php>

### 5.3 Профессиональные базы данных и информационные справочные системы (при наличии)

нет

## 6. ЛИЦЕНЗИОННОЕ И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Операционная система Simple Linux, браузер Yandex браузер, антивирусное ПО Calmantivirus;



Свободно распространяемое ПО, в том числе отечественного производства:  
Офисный пакет Libre Office, Okular PDF Reader, 7-Zip Архиватор, GIMP  
Редактирования фотографий, Inkscape Векторная графика, Blender 3D графика,  
Kdenlive Видеоредактор, Audacity Аудиоредактор, VLC Медиаплеер, Thunderbird  
Почтовый клиент, Flameshot Создание скриншотов

## **7.МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная мультимедийным оборудованием, учебной мебелью, доской или со стенами с маркерным покрытием.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, оснащенная мультимедийным оборудованием, учебной мебелью, доской или со стенами с маркерным покрытием.

Аудитория (коворкинг) для самостоятельной работы оснащенная учебной мебелью, ноутбуками.

Материально-техническое обеспечение аудиторий представлено на официальном сайте <https://bbask.ru/sveden/objects/>