

Документ подписан простой электронной подписью
 Информация о владельце:
 ФИО: Писарев Сергей Станиславович
 Должность: Ректор
 Дата подписания: 25.01.2026 18:15:46
 Уникальный программный ключ:
 b9d7463b91f434da3d4dc1afa9a0cf32d3c58650

**Негосударственное образовательное учреждение высшего образования
 «Школа управления СКОЛКОВО»**



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
 Линейная алгебра**

Направление подготовки	38.03.02 Менеджмент
Квалификация выпускника	Бакалавр
Образовательная программа	Управление и предпринимательство
Форма обучения	Очная
Рабочая программа дисциплины разработана	Антон Скубачевский, к.ф.-м.н.

Трудоемкость		Контактная работа		Самостоятельная работа	Форма контроля	Семестр
з.е.	часы	лекции	семинарские занятия			
3	108	32	34	42	Экзамен	1

**Москва
 2026**

1. АННОТАЦИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе «Линейная алгебра» изучаются матрицы и основные операции над ними. Развивается теория систем линейных уравнений, основы теории линейных пространств (базис, размерность, суммы и пересечения подпространств, двойственное пространство и связанные понятия). Вводятся понятия линейных отображений и преобразования, ядра и образа. Обсуждается перевод всех этих понятий на матричный язык. Рассматривается теория линейного преобразования (оператора) линейного пространства. Изучаются инвариантные подпространства, собственные значения и собственные векторы, характеристический многочлен, вопросы, связанные с диагонализуемостью оператора. Далее доказывается теорема Гамильтона-Кэли. Вводятся понятия билинейной формы, квадратичной формы, изучаются вопросы приведения матрицы такой формы к каноническому виду. Вводится и изучается понятие евклидова (эрмитова) пространства, связанные с ним понятия (длина, ортогональная проекция, объем). Изучаются линейные операторы и квадратичные формы на евклидовых пространствах, их приведение к каноническому виду. Описываются полярное и сингулярное разложение матрицы. Цель дисциплины – ознакомление слушателей с основами алгебры и подготовка к изучению других математических, экономических и управленческих курсов.

2. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В случае успешного освоения курса студенты будут:

знать

- операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- алгоритм Евклида для поиска наибольшего общего делителя;
- определение теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- определения и основные свойства собственных векторов, собственных значений, характеристического многочлена;
- приведение квадратичной формы к каноническому виду, критерий Сильвестра;
- координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- как методы линейной алгебры применяются в разных областях науки, в частности, в анализе данных и машинном обучении.

уметь

- производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
- решать системы линейных уравнений с помощью матричных методов;
- находить численное решение системы линейных уравнений, исследовать системы линейных уравнений на совместность;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы;

- находить собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, приводить квадратичную форму к каноническому виду, находить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

владеть

- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй.

Дисциплина направлена на развитие следующих компетенций и их индикаторов:

Код компетенции	Формулировка компетенции и/или ее индикатора (ов)
ОПК-1.	Способен решать профессиональные задачи на основе знаний (на промежуточном уровне) экономической, организационной и управленческой теории
ОПК-1-1.	Знает основы математической, экономической, социальной и управленческой теории и использует знания для решения профессиональных задач
ОПК-1-2.	Формулирует профессиональные задачи, используя понятийный аппарат математической, экономической, социальной и управленческой наук
ОПК-1-3.	Применяет инструментарий экономико-математического моделирования для постановки и решения профессиональных задач выявления причинно-следственных связей и оптимизации деятельности объекта управления

3. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Название раздела/темы	Всего часов	Трудоемкость (час.) по видам учебных занятий			
		Контактная работа			Самостоятельная работа
		Всего	Лекции	семинары	
Тема 1. Ранг матрицы	6	4	2	2	2
Тема 2. Системы линейных уравнений	8	4	2	2	4

Тема 3. Аксиоматика линейного пространства	6	4	2	2	2
Тема 4. Векторы линейного пространства	10	6	4	2	4
Тема 5. Подпространства	6	4	2	2	2
Тема 6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства	10	6	2	4	4
Тема 7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств	6	4	2	2	2
Тема 8. Инвариантные подпространства линейных преобразований	8	4	2	2	4
Тема 9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства	6	4	2	2	2
Тема 10. Линейные формы	8	4	2	2	4
Тема 11. Билинейные и квадратичные формы	6	4	2	2	2
Тема 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду	8	4	2	2	4

Тема 13. Аксиоматика евклидова пространства	8	6	2	4	2
Тема 14. Ортогонализации в евклидовом пространстве	6	4	2	2	2
Тема 15. Линейные преобразования евклидова пространства	6	4	2	2	2
Итого	108	66	32	34	42

Тема 1. Ранг матрицы

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

Тема 2. Системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.

Тема 3. Аксиоматика линейного пространства

Аксиоматика линейного пространства.

Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.

Тема 4. Векторы линейного пространства

Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.

Тема 5. Подпространства

Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.

Тема 6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства

Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).

Тема 7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств

Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов.

Тема 8. Инвариантные подпространства линейных преобразований

Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.

Тема 9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства

Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона–Кэли.

Тема 10. Линейные формы

Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис.

Тема 11. Билинейные и квадратичные формы

Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

Тема 12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями.

Тема 13. Аксиоматика евклидова пространств

Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

Тема 14. Ортогонализации в евклидовом пространстве

Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.

Тема 15. Линейные преобразования евклидова пространства

Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.

4. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА И ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Текущий контроль

Оценка за курс складывается из следующих видов заданий текущего контроля, каждый из которых обладает своим весом в общей системе:

Компоненты	Процент в итоговой оценке
Домашние работы	60%
Контрольные работы	40%

На курсе используется 10 балльная система оценивания. За каждое задание студент получает от 1 до 10 баллов. Итоговый балл за каждый вид заданий рассчитывается как среднее арифметическое всех полученных баллов за все задания в рамках одного вида (O1, O2). Невыполненное в срок задание оценивается в 0 баллов.

Общая оценка за курс (O) рассчитывается как:

$$O = O1 \times 0,6 + O2 \times 0,4.$$

Если по результатам текущего контроля студент получил положительную оценку (не ниже «удовлетворительно»), оценка за промежуточную аттестацию выставляется автоматически.

Домашние работы

Самостоятельное выполнение заданий дает студенту возможность углубить уровень усвоения материала, развить навык самостоятельного решения комплексных,

многоэтапных задач, навык работы с литературой и программным обеспечением (при необходимости). Предполагается выполнение 6 домашних заданий. Примеры заданий приведены в п. 4.3.

Контрольные работы

Проводятся в классе, проверяют способности применять знания в условиях ограниченного времени, без использования внешних источников. Позволяют провести оценку прочности усвоения ключевых алгоритмов и понятий. В процессе обучения проводится 2 контрольные работы.

Примеры заданий приведены в п. 4.3.

4.2 Промежуточная аттестация

Студентам, набравшим достаточные для удовлетворительной оценки баллы за текущий контроль, оценка за дисциплину выставляется равной оценке за текущий контроль (См. п. 4.1).

Студентам, получившим неудовлетворительную оценку по результатам текущего контроля, необходимо по согласованию с преподавателем сдать один или несколько компонентов текущего контроля. Преподаватель вправе предложить студентам выполнить задание, не повторяющее задание текущего контроля, но проверяющее аналогичные знания, умения и навыки.

4.3 Примеры заданий

Примеры заданий для текущего контроля

1. Вычислите определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Вычислите произведение матриц AB , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Вычислите обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Решите методом Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \end{cases}$$

5. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

6. Известно, что $\dim(AB) = 1$, $\dim(A) = 2$, $\dim(B) = 2$. Пользуясь формулой Грассмана, найдите $\dim(A+B)$.

7. Найдите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Вычислите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Найдите собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Вычислите определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

11. Вычислите скалярное произведение векторов $a = (1;2)$ и $b = (3;4)$ (координаты векторов заданы в ортонормированном базисе).

12. Вычислите собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1 Литература

Обязательная

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025.
2. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025.
3. Малугин, В. А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач : для вузов / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2025.

Дополнительная

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — 19-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022.

5.2 Электронные образовательные ресурсы

Материалы дисциплины размещены в LMS: <https://l.skolkovo.ru/login/index.php>.

6. ЛИЦЕНЗИОННОЕ И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Операционная система Simple Linux, браузер Yandex браузер, антивирусное ПО Calmantivirus.

Свободно распространяемое ПО, в том числе отечественного производства:
Офисный пакет Libre Office, Okular PDF Reader, 7-Zip Архиватор, GIMP Редактирования фотографий, Inkscape Векторная графика, Blender 3D графика, Kdenlive Видеоредактор, Audacity Аудиоредактор, VLC Медиаплеер, Thunderbird Почтовый клиент, Flameshot Создание скриншотов.

7.МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная мультимедийным оборудованием, учебной мебелью, доской или со стенами с маркерным покрытием.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, оснащенная мультимедийным оборудованием, учебной мебелью, доской или со стенами с маркерным покрытием.

Аудитория (коворкинг) для самостоятельной работы, оснащенная учебной мебелью, ноутбуками.

Материально-техническое обеспечение аудиторий представлено на официальном сайте <https://bbask.ru/sveden/objects/>.